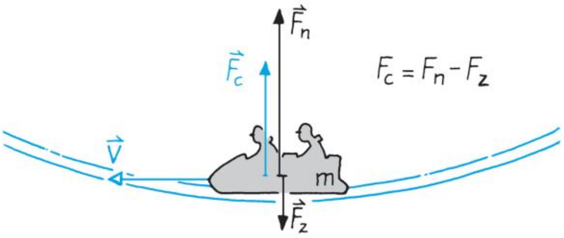
Over de kop

Een looping in een achtbaan wordt niet eenparig doorlopen. Onderin is de snelheid groot en die neemt naar boven toe af. Je hebt dus niets meer aan $v = (2\pi r)/T$, maar $F_c = \frac{mv^2}{r}$ is nog wel bruikbaar. Je moet alleen ieder punt van de baan apart bekijken. Dat doet de computer van een achtbaan-ontwerper ook.

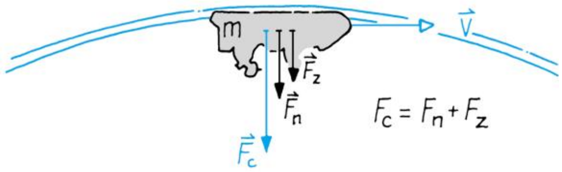
Het onderste punt van de baan



Normaalkracht $\vec{F}_n$ en zwaartekracht $\vec{F}_z$ leveren samen $\vec{F}_c$ die naar boven moet wijzen:

$F_c = F_n - F_z$

Het bovenste punt van de baan



Nu moet de gewenste $\vec{F}_c$ omlaag wijzen. Hij hoeft niet zo groot te zijn omdat v kleiner is.
$\vec{F}_z$ wijst omlaag en helpt dus mee om $\vec{F}_c$ te maken, er is nog maar een kleine $\vec{F}_n$ nodig:

$F_c = F_n + F_z$

Er is zelfs een snelheid v_{min} waarbij $\vec{F}_n$ helemaal niet meer nodig is. Het karretje is dan gewichtloos:

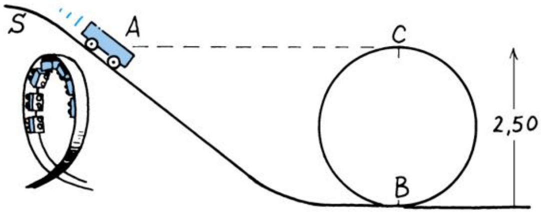
$$mg = \frac{mv_{min}^2}{r}$$

Als de snelheid kleiner zou worden dan deze v_{min} lukt de looping niet en valt het autootje uit de baan. Gelukkig zijn de karretjes in een looping bovenin én onderin ondersteund
Je slingert een kopje met 100 gram koffie verticaal rond in een cirkel met r = 1,0 m.
In het onderste punt is v = 7,0 m/s.

a Bereken v in het bovenste punt.
b Bereken F_c en F_n op de koffie in het onderste en het bovenste punt.

Nog een looping

Een kar van 2,8 kg start bij S voor een looping in een gladde baan.



a Hoe groot moet v_C minstens zijn?
b Hoe hoog moet je S minstens kiezen?
► We kiezen S hoger zodat v_A = 5,0 m/s.
c Bereken v_B.
d Bereken de normaalkrachten in B en C.
e Leg uit waarom de diameter van een looping in een pretpark naar boven toe afneemt.

Het gewicht van een piloot

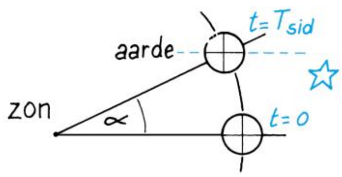
Een piloot maakt een bocht achterover met een *constante snelheid*; r = 9,4 km en v = 680 m/s (mach 2).

a Bereken de breuk F_c/F_z.
b In welk punt van de baan voelt hij zijn stoel het meest?

De siderische rotatieperiode

Na één *siderische rotatieperiode* T_{sid} van 23,93 h heeft de aarde weer dezelfde oriëntatie ten opzichte van de sterren, maar nog niet ten opzichte van de zon.

- Toon aan dat de aarde dan nog over het hoekje $\alpha \approx 1°$ moet draaien en dat de dag dus 24 h duurt.



Geostationaire kunstmanen

Geostationaire kunstmanen hangen altijd boven dezelfde plaats op de evenaar. Zij moeten dus ook in 24 uur hun rondjes draaien.

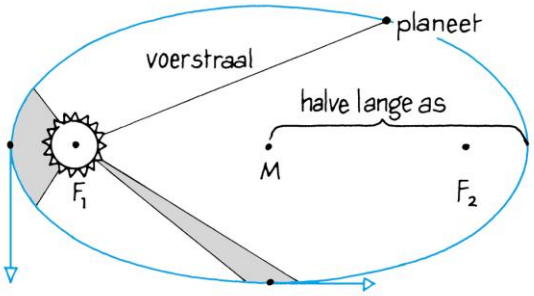
***a*[1]** Leid uit de derde wet van Kepler (zie p. 94) de straal van hun baan af.
***a*[2]** Op welke *hoogte* boven de aarde bevinden zij zich? Druk die afstand ook uit in $R_{\oplus}$, de straal van de aarde.
b Boven welke breedtegraad kan een antenne niet meer op zo'n kunstmaan worden gericht?
►Voor communicatie in de poolgebieden worden polaire kunstmanen gebruikt.
c Bereken de omlooptijd van zo'n kunstmaan die op een hoogte van 500 km rondjes draait.

De wetten van Kepler

De zon is een ster waar de aarde omheen draait – op een afstand van 8 lichtminuten. Doordat alle andere sterren zover van ons af staan, zien we die als puntjes aan de hemel. De dichtstbijzijnde ster staat op vier lichtjaar. In de oudheid waren de ‘dwaalsterren’ al bekend: de planeten Mercurius, Venus, Mars, Jupiter en Saturnus. Maar pas door het werk van Copernicus in de 16^{e} eeuw kwam men er achter dat ze, net als de aarde, om de zon draaien. Later werden nog ontdekt: Uranus (1781), Neptunus (1846) en Pluto (1930). Nog weer later (2006) werd Pluto gedegradeerd tot dwergplaneet.
De ‘binnenplaneten’ Mercurius en Venus staan dichter bij de zon dan de aarde. Daarom kunnen we ze alleen omstreeks zonsop- en ondergang zien; Mercurius met veel moeite, maar Venus zo helder dat zij ook wel ‘ochtendster’ of ‘avondster’ wordt genoemd, hoewel zij geen ster is. Van de ‘buitenplaneten’ zijn Mars en Jupiter zeer opvallend.
De maan en alle planeten moet je zoeken in de buurt van de ecliptica, dat is de baan die de zon door de ‘dierenriem’ aflegt.
Tenslotte horen tot het zonnestelsel ook de kometen. Dat zijn grote brokken ijs met steen die in zeer langgerekte ellipsbanen rond de zon draaien. Als ze in de buurt van de zon komen, verdampen ze gedeeltelijk en krijgen ze soms een heldere staart. Vallende sterren (meteoren) zijn geen sterren maar kleine stukjes steen of ijs die in hun baan om de zon de dampkring van de aarde treffen en daarin verbranden of verdampen. Restanten die op de aarde terechtkomen worden meteorieten genoemd.
Voor al deze materie in het zonnestelsel gelden de drie wetten die Kepler in de 17^{e} eeuw afleidde uit de waarnemingen van Brahe. Die wilde bewijzen dat de banen van de planeten cirkels zijn, maar dat lukte hem niet en hij verklaarde dat uit onnauwkeurig meten.
Zijn assistent Kepler nam echter aan dat de metingen goed waren en toonde aan dat het om ellipsbanen ging met de zon in een van de brandpunten F (eerste wet).

De tweede wet is het belangrijkst; hij wordt nu de ‘wet van behoud van draaiimpuls’ genoemd. Volgens deze wet is de snelheid van een planeet in de buurt van de zon (in het *perihelium*) het grootst en in het verste punt (het *apohelium*) het kleinst. In gelijke tijden worden door de ‘voerstraal’ gelijke oppervlakken (perken) beschreven. Deze wet heet daarom ook wel de *perkenwet*.

De derde wet zegt dat voor de halve lange as a en de omlooptijd T geldt: $T^2 = k \cdot a^3$.



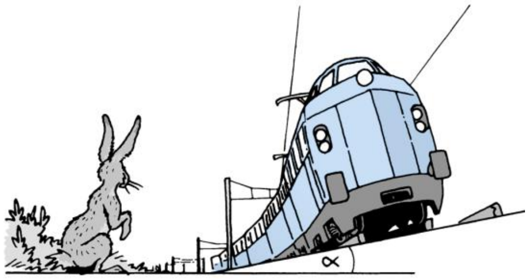
Je wilt het zonnestelsel op schaal maken met een ‘skippy ball’ (straal 35 cm) als zon.

a Hoe groot worden aarde, maan en Jupiter?
b Op welke afstand staat Pluto?
c^1 Op welk halfrond is op aarde de winter het langst?
c^2 Wanneer staat de aarde in het apohelium?
►Net als bij de aarde staat de as van Mars scheef; zijn baan is echter veel elliptischer. Als Mars in zijn perihelium staat, is het op zijn noordelijk halfrond winter.
d Verklaar waarom de zuidelijke poolkap van Mars wel helemaal afsmelt als het daar zomer is en de noordelijke poolkap niet.
►De komeet Halley heeft een periode van 76 jaar.
e Toon aan dat deze verder van de zon komt dan Neptunus.
►Voor k in de derde wet geldt: $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ als de baan een cirkel is.
f Bewijs dit met $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ en $v = \frac{2\pi r}{T}$.
►Ook voor de manen van de planeet Jupiter (zie tabel 31) geldt de gravitatiewet van Newton en dus de derde wet van Kepler.
g^1 Bereken de waarde van k voor Jupiter.
g^2 Controleer dit voor minstens één maan met de waarden van r en T.

Een trein in de bocht

In een bocht met een straal van 500 m rijden treinen met gemiddeld 70 km/h. Men wil bij die snelheid geen zijdelingse wrijving en geeft daarom de baan een hellingshoek □.

a Construeer hoe $\vec{F}_c$ tot stand komt.
b Bereken de hoek α.



Een fiets door een bocht

Een fietser draait een rondje en helt daarbij 18° over. Z is het zwaartepunt van fietser + fiets. Vanuit S werkt er een kracht $\vec{F}_S$ die door Z gaat.

- ***a*** Teken op schaal hoe $\vec{F}_z$ en $\vec{F}_S$ samen in Z $\vec{F}_c$ leveren.
- ***b*** Toon aan: $a_c = 3{,}2\ \mathrm{m/s^2}$.
- ***c*** Bereken de straal van de bocht als v = 10 km/h.

De hodograaf

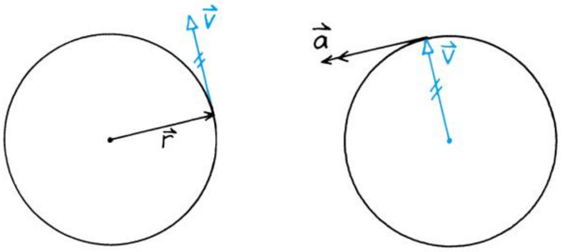
We kunnen $a_c = v^2/r$ met een speciale truc afleiden. Als een treintje met een constante vaart in een cirkel rijdt, draait zijn *plaatsvector* $\vec{r}$ eenparig rond. De plaatsvector is de vector die je vanuit het centrum van de cirkel naar het treintje kunt trekken. De snelheidsvector $\vec{v}$ raakt aan de cirkel en staat dus steeds loodrecht op $\vec{r}$.

Er geldt: $\vec{v} \perp \vec{r}$ en $v = \omega r$.

Nu knopen we de snelheidsvectoren met de staarten aan elkaar. Zo'n bundel snelheidsvectoren heet een *hodograaf* (hodos is het Griekse woord voor weg; dus letterlijk een wegbeschrijver). Zoals de snelheid aangeeft hoe de plaats verandert, zo geeft de versnelling aan hoe de snelheid verandert. Naar analogie moet dus gelden:

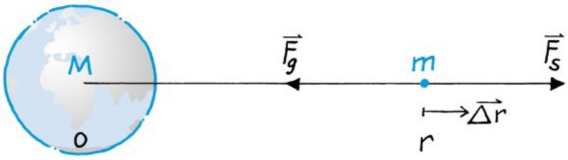
$\vec{a} \perp \vec{v}$ en $a = \omega v$

- ***a*** Leid de formule voor a_c hieruit af.
- ***b*** Hoe ziet de hodograaf van een horizontale worp eruit?



Gravitatie-energie

Als wij met onze spierkracht F_s een massa m met constante snelheid een afstand Δr verder van de aarde duwen, dan verricht F_s positieve arbeid ΔW en neemt de gravitatie-energie E_g toe.



$$\Delta W = F_s \cdot \Delta r = \frac{GMm}{r^2}\Delta r$$

Als we van r naar ∞ gaan, dan neemt E_g toe van $E_g(r)$ tot $E_g(\infty) = 0$. $E_g(r)$ is dus negatief!

De arbeid W die daarbij geleverd is, vinden we door te integreren:

$$W = \int_r^\infty \frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r = \left[-\frac{GMm}{r}\right]_r^\infty = 0 + \frac{GMm}{r}$$

Al met al geldt dus:

$$W = \frac{GMm}{r} = E_g(\infty) - E_g(r) \quad \Rightarrow$$

$$E_g(r) = -\frac{GMm}{r}$$

- ***a*** Schets de $F(r)$-grafiek als m = 1 kg. Laat de r-as tot $3R$ lopen.
- ***b*** Geef in de grafiek de energie aan om m van R naar $2R$ te brengen.

Slingshots

Op p.229 staat hoe je de ontsnappingssnelheid v_o kunt berekenen. De snelheid die je nodig hebt om het zonnestelsel te verlaten, bereken je door voor M de massa van de zon te gebruiken en voor r de afstand tot de zon.

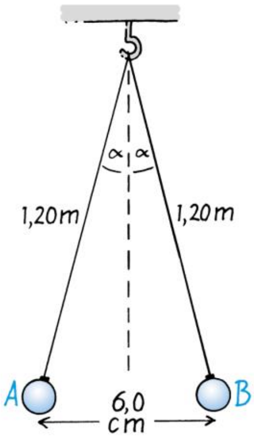
- ***a*** Bereken de snelheid van de aarde in zijn baan om de zon.
- ***b*** Bereken de snelheid om vanaf de aardbaan het zonnestelsel te verlaten.
  ►Die uitkomst is overigens veel kleiner (17 km/s) als je slim gebruikt maakt van onze buitenplaneten. Kijk op internet en op de site bij de applet (*gravitational*) *slingshot*.

De reis naar de maan

In *De reis naar de maan* van Jules Verne blijkt de aarde een tweede maan te hebben op 8140 km hoogte boven het aardoppervlak. Die maan volbrengt haar omloop in 3 uur en 20 minuten.

- ***a*** Welke waarde heeft g op die hoogte?
- ***b*** Toon aan dat die tijd anderhalf uur langer zou moeten zijn.
  ►Aan het begin van de reis sterft de hond 'Wachter'. Die wordt overboord gezet en vliegt mee met de raket.
- ***c*** Leg uit of dat klopt.
  ►Verne dacht dat de reizigers op één moment gewichtloos zouden zijn.
- ***d*** Leg uit of dat klopt.
- ***e*** Bereken de plaats van het punt tussen aarde en maan waar de zwaartekracht nul is.

Twee minikerstballen



Twee minikerstballen hebben een massa van 0,16 g. Hun oppervlak is voorzien van een geleidende coating. Ze zijn opgehangen aan nylondraden van 1,20 m lengte. Beide krijgen dezelfde lading en wijken uiteen. De afstand tussen de middelpunten wordt 6,0 cm

a Teken alle krachten op A.
b Bereken de elektrische kracht op A.
c Bereken de lading van A.
►Je ontlaadt B door hem even aan te raken.
d Beschrijf wat er dan gaat gebeuren.
e^1 Beredeneer dat beide na afloop dezelfde lading en dezelfde uitwijking zullen hebben.
e^2 Hoe groot is die lading nu?
•***f*** Bereken de afstand tussen de middelpunten.

De regel van Titius en Bode

In de 18e eeuw ontdekte Titius een regelmaat in de afstanden van de planeten tot de zon. Bode publiceerde er als eerste over, vandaar dat de regel bekend staat als de regel van Titius-Bode. Neem de getallen 0, 3, 6, 12, 24, ... (verder steeds het dubbele), tel er 4 bij en deel door 10. Dan ontstaat een reeks die vrij nauwkeurig de afstand in astronomische eenheden (AE) van de planeten tot de zon weergeeft. Boven de symbolen van de planeten die toen bekend waren, staat het getal van Titius-Bode, eronder de afstand in AE:

0,4	0,7	1	1,6	2,8	5,2	10,0
☿	♀	⊕	♂		♃	♄
0,39	0,72	1,00	1,52		5,20	9,54

Pas in de jaren 60 van de vorige eeuw is met computerberekeningen aangetoond dat de banen van een satellietenstelsel zich op den duur zo instellen. De banen verstoren elkaar voortdurend, zodat er afwijkingen van de ellipsen van Kepler ontstaan, maar na miljoenen jaren krijg je een soort evenwicht. Wat de 'wet' voorstelde, wist men dus voor die tijd niet, maar men gebruikte hem wel. In 1781 vond Herschel de planeet Uranus die goed na de afstand 10 AE in de reeks paste en na 1800 vond men op de open plek bij 2,8 AE verschillende 'planetoïden' (dwergplaneten). Deze laatste zijn niet tot de vorming van een planeet gekomen door de storende werking van Jupiter.

a Schrijf de wet in een wiskundige vorm.
b^1 Zoek in *Binas* de baanstralen op van de dwergplaneten Ceres en Pluto en de planeten Uranus en Neptunus.
b^2 Controleer de wet van Titius-Bode voor deze vier.
- Onderzoek hoe goed de wet geldt voor:
c^1 de manen van Jupiter (zie *Binas*);
c^2 de baanstralen van deze manen van Uranus:

Miranda	130 450 km
Ariël	191 790 km
Umbriël	267 180 km
Titania	438 370 km
Oberon	586 230 km

De manen van Jupiter

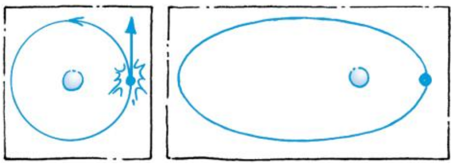
Zoek in *Binas* de gegevens op van de vier manen van Jupiter.

a Hoe zal de grafiek eruit zien als je r^3 tegen T^2 uitzet?
b Plot r tegen T op dubbel-logaritmisch papier, of zet $\log r$ uit tegen $\log T$.
c Klopt de helling met wat je verwachtte?
d Bepaal de massa van Jupiter met behulp van het afgesneden stuk op de $\log r$-as.

Voor de volgende opgaven heb je de wetten van Kepler nodig.

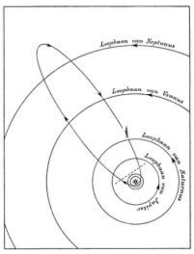
Een botsing

Door een botsing met een zware meteoriet kreeg een geostationaire kunstmaan een duw in de rug.



a Leg uit waarom de kunstmaan daarna een 'liggende' ellipsbaan beschrijft.
► Stel de duw kwam van de andere kant en de kunstmaan zou daarna nog een kleine snelheid hebben.
b Hoe zou de ellipsbaan er dan uitzien?
c Schat hoeveel uur het zou duren voor hij op de aarde zou storten.
(Gebruik de derde wet van Kepler en geef aan welke vereenvoudigingen je toepast)

De komeet Halley



Hier is te zien dat de komeet van Halley (T = 76 jaar) verder van de zon komt dan Neptunus.

a Hoe zie je dat dit een plaatje van vóór 1930 is?
►De komeet scheert langs de zon ($8{,}8 \cdot 10^{10}$ m) en het verste punt ligt op $5{,}25 \cdot 10^{12}$ m.
b Toon met de derde wet van Kepler aan dat het plaatje correct getekend is.
c Bereken zijn hoogste snelheid als zijn laagste 0,83 km/s was.
d Bereken zijn totale energie.