

De Cessna in het Centraal Eindexamen natuurkunde vwo 2017-1

Over een mislukt model

Hubert Biezeveld, Zwaag en Ruud Brouwer, Amsterdam.

In het 1^e tijdvak 2017 van het VWO examen natuurkunde werd in vraag 8 t/m 10 met behulp van een numeriek model nagedacht over de start van een Cessna. Op het eerste gezicht mooie natuurkunde en een leuke context, maar helaas klopt er van alles niet. De inleidende tekst van het examen en de numerieke modelregels staan in het kader.

<p>Om inzicht te krijgen in de beweging van de Cessna op de startbaan wordt een vereenvoudigd model gemaakt. Bij dat model gelden de volgende aannamen:</p> <ul style="list-style-type: none"> – gedurende de hele start is het motorvermogen constant, – gedurende de hele start is de rolwrijving constant. 		
<p>Model</p> $F_z = m \cdot g$ $F_{\text{lift}} = k_{\text{lift}} \cdot (v - v_{\text{wind}})^2$ $F_{\text{wlucht}} = k_w \cdot (v - v_{\text{wind}})^2$ $F_w = F_{\text{wlucht}} + F_{\text{rol}}$ <p>als $F_{\text{lift}} > F_z$ dan stop eindals</p> $P_{\text{netto}} = P_m - F_w \cdot v$ $E_k = \dots\dots\dots$ $v = \sqrt{2 \cdot E_k / m}$ $ds = v \cdot dt$ $s = s + ds$ $t = t + dt$	<p>Startwaarden in SI-eenheden</p> $t = 0$ $dt = 0,001$ $F_{\text{rol}} = 910$ $k_{\text{lift}} = 5,68$ $k_w = 0,913$ $v_{\text{wind}} = +5$ $m = 710$ $g = 9,81$ $P_m = 74000$ $E_k = 0$ $v = 0$ $s = 0$	
<p>Vraag 8: Vul de modelregel voor E_k aan. Volgens het antwoordmodel is het antwoord: $E_k = E_k + P_{\text{netto}} \cdot dt$</p>		<p><i>De $v(t)$-grafiek in de uitwerkbijlage.</i></p>

Als je alleen het model gelezen hebt, lijkt er niet veel aan de hand, maar dat het model de werkelijkheid groot geweld aandoet, wordt meteen duidelijk als je de berekende $v(t)$ -grafiek in de uitwerkbijlage ziet staan voor de situatie waarbij wordt gestart met windstil weer ($v_{\text{wind}} = 0$).

Uit deze grafiek blijkt namelijk dat de versnelling waarmee het vliegtuig start oneindig groot is, want de rc van de raaklijn op $t = 0$ s is verticaal. De fout zit hem natuurlijk in de aanname dat P_m constant is:

$$E_k = E_k + P_{\text{netto}} \cdot dt \quad \text{met} \quad P_{\text{netto}} = P_m - F_w \cdot v \quad \text{én} \quad P_m = \text{constant.}$$

Optrekken met een constant vermogen kan niet. Ga maar na, voor het vermogen bij verrichten van arbeid geldt *altijd* $P = F_{\text{motor}} \cdot v$. Bij de start is $v = 0$ dus zou F_{motor} dan ∞ moeten zijn! Deze fout wordt wel vaker gemaakt in natuurkundeboeken maar in een opgave voor het centraal examen mag hij niet voorkomen. Bij de examenmakers had echt een belletje moeten gaan rinkelen toen ze deze grafiek zagen.

De fout is waarschijnlijk veroorzaakt doordat twee manieren van energietoevoer verward werden: toevoer door warmte en toevoer door arbeid. Warmte kan bij een constant vermogen worden toegevoerd. Daarbij wordt de inwendige energie van een voorwerp vergroot, zoals bij opwarmen van water:

$$Q = P \cdot \Delta t = cm\Delta T$$

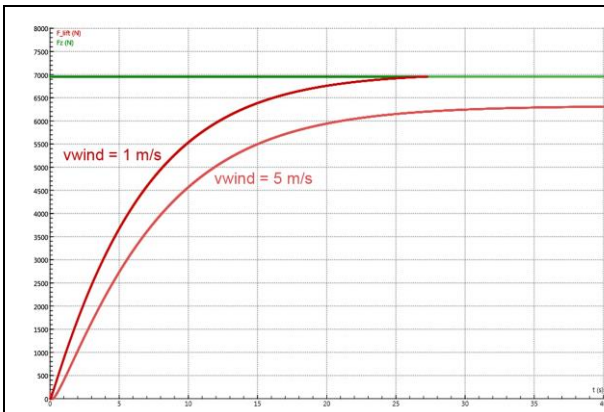
Vergroten van de kinetische energie van een knikker, een auto of een Cessna kan alleen door arbeid te verrichten. Het vermogen dat daarbij een rol speelt, kan niet constant zijn.

Starten met meewind

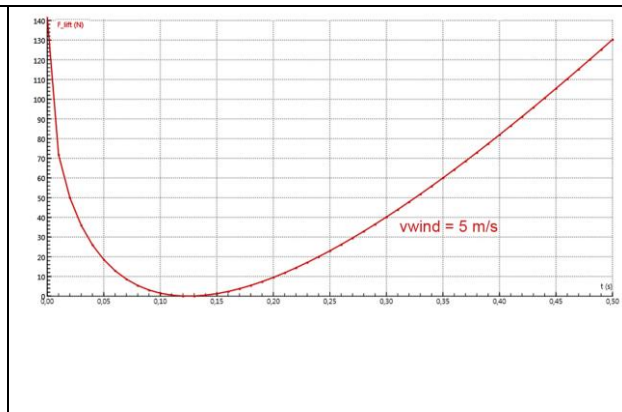
Bij de startwaarden in het kader staat $v_{\text{wind}} = + 5 \text{ m/s}$, ofwel een meewind van 5 m/s. Dit is zeer ongebruikelijk en bij een Cessna wordt – voor zover wij weten – nooit met meewind gestart. Bij 5 m/s gaat het bovendien écht mis en zal het vliegtuig aan het eind van de startbaan in de sloot terecht komen. Aan de stopconditie “als $F_{\text{lift}} > F_z$ dan stop eindals” wordt namelijk nooit voldaan zoals uit de $F(t)$ -grafieken blijkt. De groene lijn geldt voor F_z en de rode lijnen voor F_{lift} . Pas bij een meewind van 1 m/s gaat het goed.

De staart van de $v(t)$ -grafiek in de uitwerkbijlage – als $t = 20 \text{ s}$ en het vliegtuig loskomt van de grond – geeft ook te denken, want die loopt bijna horizontaal. Dit betekent dat het opstijgen met windstil weer nog maar nét lukt. Eng hoor!

Als je regel 2 van het model goed bekijkt, zie je dat meewind sowieso voor problemen moet zorgen. Als we het begin van de grafiek van F_{lift} uitvergroten, zien we dat deze kracht eerst afneemt. Bovendien duwt deze ‘lift’ het toestel juist tegen de grond, want tot $t = 0,12 \text{ s}$ heb je meewind en die kan niet voor lift zorgen. Pas daarna heb je ‘echte’ lift. Hebben de examenmakers dat niet gezien bij het testen van het model?



De krachtgrafieken.



Het begin van de $F_{\text{lift}}(t)$ -grafiek.



Hubert Biezeveld,
oud-docent aan de OSG
West-Friesland in Hoorn en
oud-hoofdredacteur van
Faraday
auteur van *Stevin*.
hubert.biezeveld@planet.nl



Ruud Brouwer
docent aan het Don Bosco College
in Volendam
auteur van *Stevin*
rbrouwer@donboscollege.com

Het commentaar van het CvTE

Wij hebben onze problemen natuurlijk aan het CvTE voorgelegd. Daarop kregen we dit commentaar van de ‘vakdeskundigen’:

“De aanname van een constant vermogen is gedaan, om het model niet te ingewikkeld te maken. [...] Hierbij staat centraal dat een leerling de vragen moet kunnen beantwoorden zonder nadeel te ondervinden van mogelijk ‘vreemde’ aannames.”

We zijn het ermee eens dat je een model zo simpel mogelijk moet houden, maar onzin zoals in het model van het examen is niet toegestaan.

Ook schreven zij ons:

“Omdat we in dit model met name naar het eind van de start kijken zijn er een paar aannamen gedaan die aan het begin van de start iets vreemds geven. De aanname van P_m constant is natuurkundig te bediscussiëren, maar kan in een eerste versie van een model gerust gedaan worden.”

Volgens ons is “iets vreemds” het eufemisme van het jaar en is over $P_m = \text{constant}$ geen discussie mogelijk, want die aanname is onjuist. De verticale raaklijn op $t = 0$ is niet vreemd, maar onzinnig.

Over het starten met meewind schreven zij:

“U heeft gelijk dat er iets vreemds aan de hand is. Als je een model echter bekijkt om het probleem van starten te beschrijven, is wat hier aan de hand is niet verontrustend. Er is dus ook niets engs aan als bij zo een eenvoudig model blijkt dat je soms niet kunt opstijgen. Om de verschillen tussen de twee situaties in de opgave duidelijk te maken zijn de startwaarden op deze manier gekozen. Er is voor gezorgd dat de grafieken die gepresenteerd zijn precies volgen uit het model.”

Later schreven zij nog:

“Natuurkundig hebben de schrijvers volkomen gelijk.

Maar wat is de functie van een model?

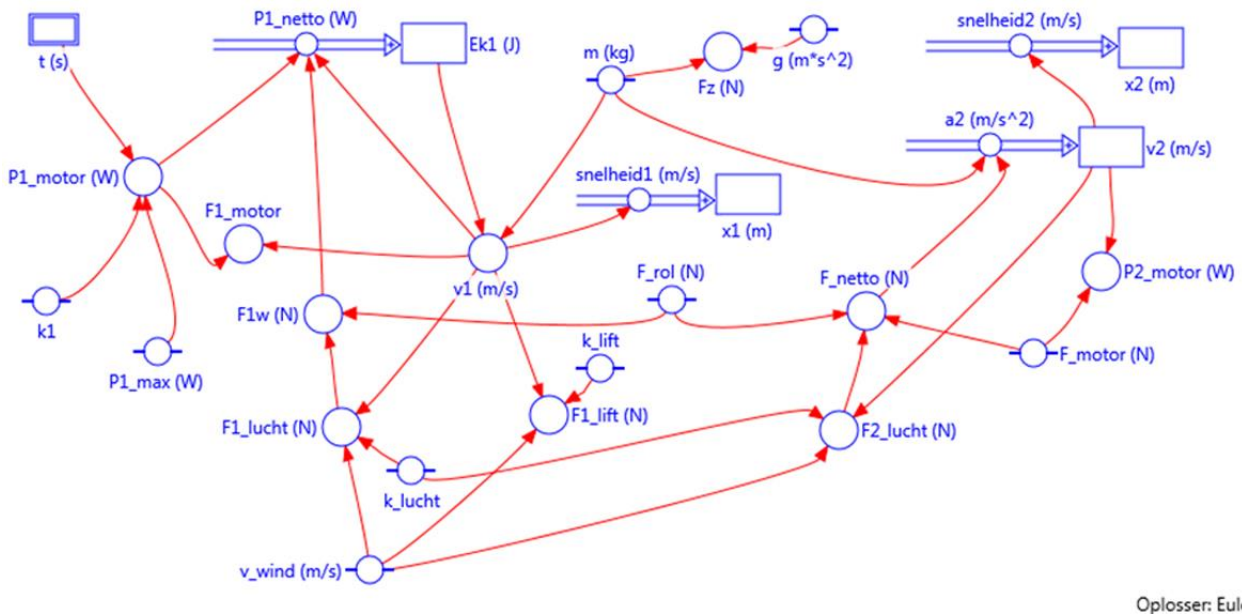
Volgens ons is een van de basiseigenschappen van een model, dat het een beschrijving is van een (nuttige) vereenvoudiging van de werkelijkheid, waarmee in bepaalde situaties voorspellingen kunnen worden gedaan.

Het model in het examen is daar een mooi voorbeeld van. Het model kan sommige dingen goed beschrijven en voorspellen (de vragen in het examen zijn hiermee te beantwoorden). Maar het heeft ook beperkingen, zoals de artikelschrijvers aangeven. Met dit model in deze opgave, kan de leerling goede antwoorden vinden, én bij eventuele verdere analyse van het model inschatten dat het model ook zijn beperkingen heeft.”

Hoera! Als uit een onzinnig model een grafiek volgt waarover je op het CE een vraag kunt stellen, mag niemand meer zeuren.

Met weinig moeite zijn voor de optrekkende Cessna betere en nog steeds eenvoudige modellen te maken. Hier staan twee voorbeelden in één figuur. Model 1 gaat uit van een vermogen dat toeneemt volgens een e-macht. Model 2 gaat uit van een constante kracht. De resultaten ontlopen elkaar weinig.

Op onze site www.stevin.info kan dit dubbele model opgehaald worden. Ook is daar de handleiding te vinden die Hubert gebruikte bij een werkgroep grafisch modelleren met Coach7 op de WND-conferentie van 2016.



Opllosser: Euler

```

Vergelijkingen
Ek1(t) = Ek1(t-Δt) + (P1_netto)*Δt (J)
P1_netto = P1_motor-F1w*v1 (W)
v1 = Sqrt(2*Ek1/m) (m/s)
F1w = F1_lucht+F_rol (N)
F1_lucht = k_lucht*(v1-v_wind)^2 (N)
F1_lift = k_lift*(v1-v_wind)^2 (N)
Fz = m*g (N)
x1(t) = x1(t-Δt) + (snelheid1)*Δt (m)
snelheid1 = v1 (m/s)
P1_motor = P1_max*(1-Exp(-k1*t)) (W)
F1_motor = P1_motor/(v1+2)
x2(t) = x2(t-Δt) + (snelheid2)*Δt (m)
snelheid2 = v2 (m/s)
v2(t) = v2(t-Δt) + (a2)*Δt (m/s)
a2 = F_netto/m (m/s^2)
F_netto = F_motor-(F_rol+F2_lucht) (N)
P2_motor = F_motor*v2 (W)
F2_lucht = k_lucht*(v2-v_wind)^2 (N)

Ek1_ini = 0 (J)
P1_max = 74000 (W)
F_rol = 910 (N)
k_lucht = 0,913
v_wind = -2 (m/s)
k_lift = 5,68
m = 710 (kg)
g = 9,81 (m*s^2)
x1_ini = 0 (m)
k1 = 0,08
x2_ini = 0 (m)
v2_ini = 0 (m/s)
F_motor = 2150 (N)
    
```

