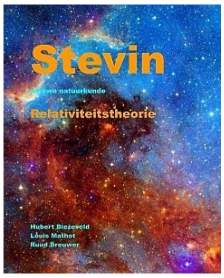
OuNa 16 SRT

Ruud Brouwer



De *Speciale Relativiteitstheorie* (SRT) is al antiek en hoort gewoon bij OuNa.
Ik heb mij voorgenomen om bij het behandelen van de theorie en de opgaven in het katern *Speciale relativiteitstheorie* van *Stevin* de lorentz-transformatie extra te benadrukken. Deze transformatie is veel fundamenteler dan ik voorheen had begrepen. In deze OuNa worden daar een paar voorbeelden van gegeven.
De stof biedt genoeg voer voor de theoretisch ingestelde leerling, maar gelukkig is er als ‘practicum’ een originele manier om snelheden op te tellen.

$E = pc$

De dynamica van de SRT rust op twee bouwstenen: $E = pc$ en $E = mc^2$. Einstein bewees $E = mc^2$ met behulp van zijn beroemde doos (zie p. 10 van het katern).
Dat $E = pc$ voor fotonen werkt, weten we indirect uit de elementaire deeltjesfysica: laat een foton en een elektron botsen en de behoudswetten kloppen als je $p = E/c$ invult.
Experimenten met als enige doel $E = pc$ te testen, werken met een fotonenbundel. Die bundel is gericht op een dun metalen oppervlak dat in vacuüm aan een torsiedraad hangt.
De stralingsdruk (1 W zichtbaar licht bestaat uit $\approx 10^{18}$ fotonen per seconde) is de kracht F verspreid over het oppervlak. Een 100% spiegelend oppervlak ondervindt een twee keer zo grote kracht in vergelijking met een volkomen absorberend oppervlak. In de praktijk zal een fractie ρ van de fotonenbundel gereflecteerd worden.

A.P. French beschrijft in zijn uitstekende boek *Special Relativity* uit 1968 dat de proef in 1928 door Gerlach en Golsen met succes is uitgevoerd. Zij schreven $c = E/p$ als $c = W\cdot(1 + \rho)/F$ met W het vermogen van de bundel in Watt en F de impulsoverdracht per seconde. Dit zijn de waarnemingen waarmee zij $E = pc$ konden bewijzen:

TABLE 1-3: RADIATION-PRESSURE EXPERIMENT

Material of vane	*Reflection coefficient* ρ	*Incident power* W, $\times 10^{-2}$ *watt*	*Measured force* F, $\times 10^{-10}$ *newton*	$W(1+\rho)/F$, $\times 10^{8}$ *m/sec*
Pt	0.60	6.07	3.14	3.09
Pt	0.60	2.80	1.44	3.11
Ni	0.43	6.39	3.23	2.83
Al	0.81	6.39	3.91	2.96
Al	0.81	2.78	1.74	2.89
			Av.	2.98

Lorentz-transformatie

De afleiding van de lorentz-transformatie wordt in het katern aan de hand van de redenering van Feynman voorgedaan. Links staat de lorentz-transformatie als W′ ten opzichte van W met de snelheid v naar rechts gaat. Rechts staat de inverse lorentz-transformatie.

$x' = \gamma\cdot(x - \beta\cdot ct)$	$x = \gamma\cdot(x' + \beta\cdot ct')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$ct' = \gamma\cdot(ct - \beta\cdot x)$	$ct = \gamma\cdot(ct' + \beta\cdot x')$

Hierin zijn zoals gewoonlijk $\beta = v/c$ en $\gamma = 1/\sqrt{(1 - \beta^2)}$.

We kiezen een raket met $\beta = 0{,}6$ en dus $\gamma = 1{,}25$. Als t wordt uitgedrukt in seconde, dan heeft ct de eenheid lichtseconde (ls); 1 ls = $3\cdot 10^8$ m. Het voordeel hiervan is dat de lorentz-transformatie dan de mooie symmetrische vorm krijgt zoals in de tabel is te zien.
Een voorbeeld: stel er vinden twee gebeurtenissen plaats:

P_1 (x_1 = 10 ls; ct_1 = 60 ls) en P_2 (x_2 = 50 ls; ct_2 = 90 ls).

In het stelsel van de stilstaande W zit er dus een afstand van 40 ls tussen P_1 en P_2 en een tijdsinterval van 30 s. Hoe groot zijn deze afstand en het tijdsinterval voor W′ in de raket?

Pas de lorentz-transformatie toe:

$x_2' - x_1' = 1{,}25\cdot\{(50 - 0{,}6\cdot 90) - (10 - 0{,}6\cdot 60)\} = 27{,}5$ ls.

$ct_2' - ct_1' = 1{,}25\cdot\{(90 - 0{,}6\cdot 50) - (60 - 0{,}6\cdot 10)\} = 7{,}5$ ls.

En dus is $t_2' - t_1' = 7{,}5$ s.

Lichtbol

Waarnemer W in de oorsprong van zijn stilstaande stelsel S knipt een flitslamp aan. Dan zal na een bepaalde tijd t het licht zich op een boloppervlak op afstand $r = ct$ van de oorsprong bevinden.

W′ in zijn raket met snelheid v komt op $t = t' = 0$ voorbij de oorsprong van S – dus precies op moment dat W de lamp aanzet. Welke vorm heeft het zich verspreidende licht volgens W′? Hij ziet verrassenderwijs ook een bol!
De lorentz-transformatie legt uit waarom dit zo is: kwadrateer de vergelijking $r = ct$ en herschrijf hem als $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$. Vul de *inverse* lorentz-transformatie in:

$$\gamma^2\cdot(x' + \beta\cdot ct')^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2\cdot(ct' + \beta\cdot x')^2$$

Werk de haakjes uit, pas de relatie $\gamma^2(1-\beta^2) = 1$ toe en vul de lorentz-transformatie in. Dan staat er:

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$ ofwel $r' = ct'$.

Afbuigen van licht

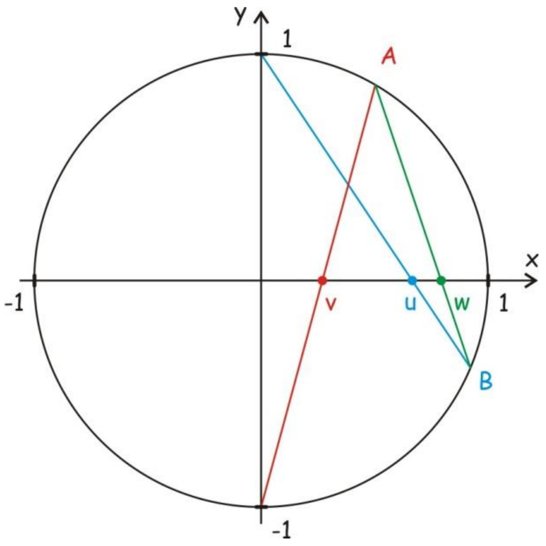
In 1911 speculeerde Einstein dat licht iets afgebogen wordt als het rakelings langs een ster scheert omdat $m = E/c^2$ van een foton in de gravitatieformule van Newton ingevuld kan worden. Hij wist niet dat de berekening al in 1801 door de Duitse astronoom J. Soldner was gedaan! Soldner beschouwde – net als Newton – licht als kogeltjes met snelheid c en kwam op: $\alpha = 2GM/(c^2R)$. [Volgens de algemene relativiteitstheorie zit deze formule een factor 2 mis]

Snelheden optellen

Hoe iemand op het idee komt, snap ik niet, maar je kunt met een eenheidscirkel heel eenvoudig de relativistische somsnelheid grafisch bepalen.
De twee op te tellen snelheden zijn:
$v_1 = v \cdot c$ en $v_2 = u \cdot c$ en de som wordt $v_{som} = w \cdot c$.
Er geldt natuurlijk: $v \leq 1$, $u \leq 1$ en $w \leq 1$

- Teken een eenheidscirkel ($\beta = 1$) en geef v en u met een kleur aan op de x-as.
- Trek de hulplijnen naar A en B.
- Verbind A en B en bepaal het snijpunt met de x-as.
- Het snijpunt blijkt de waarde van w op te leveren volgens:

$$w = \frac{u+v}{1+uv}$$



- Maak zo'n cirkel (straal minstens 10 cm) en controleer de bewering voor zelfgekozen waarden van v en u.
- Ga na wat je krijgt als $v = 1$.
- Ga na wat het effect is van $u < 0$.
- Begin met $0 < w < v$ met $v > 0$ en bepaal u.

De theorie achter de truc met de cirkel

Voor de cirkel geldt:
$x^2 + y^2 = 1$
Voor de twee hulplijnen geldt:

$$y = \frac{1}{v}x - 1 \text{ en } y = -\frac{1}{u}x + 1$$

Ga na dat voor A en B geldt:

$$\text{A:}\left(\frac{2v}{v^2+1};\frac{1-v^2}{v^2+1}\right) \text{ en B:}\left(\frac{2u}{u^2+1};\frac{-1+u^2}{u^2+1}\right)$$

Voor de lijn door A en B geldt: $y = a \cdot x + b$
Toon aan dat voor a en b geldt:

$$a = \frac{uv+1}{v-u} \text{ en } b = -\frac{v+u}{v-u}$$

Toon aan dat voor het snijpunt met x-as geldt:

$$w = \frac{u+v}{1+uv}$$