OuNa 6 Schaalwetten

NVOX, **37**, nr. 10, december 2012
Ruud Brouwer, Don Bosco College te Volendam, rbrouwer@donboscocollege.com

In deze zesde Oude Natuurkunde (OuNa) begeef ik mij als natuurkundige op glad biologisch ijs. Kun je op puur mechanische principes uit de sterkteleer voorspellen tot welke hoogte een boom maximaal kan doorgroeien? En kun je uitgaande van eenvoudige maar logische schaalwetten iets zeggen over fysiologische functies bij dieren? Galilei dacht van wel.
Het werken met evenredigheden zal vooral aanhangers van Nieuwe Natuurkunde (NiNa) aanspreken; dit was een van de speerpunten van de commissie. Leerlingen zijn er minder dol op, maar misschien dat deze OuNa ze er een beetje aan kan laten wennen.

Schaalmodel van Galilei

In het simpele schaalmodel van Galilei is de massa m van een dier evenredig met zijn volume V. Het volume is op zijn beurt weer evenredig met de derde macht van een karakteristieke lengte L van het dier: $m \sim V \sim L^3$.
Vergelijk een koe van 650 kg met een muis van 30 g. De verhouding van de karakteristieke lengten wordt dan:

$$\frac{L_{koe}}{L_{muis}} = \sqrt[3]{\frac{m_{koe}}{m_{muis}}} = \sqrt[3]{\frac{650}{0{,}030}} = 28$$

Dit betekent dat de poten van een muis 28 keer zo klein zijn als de poten van een koe en het dwarsoppervlak van de spieren van een muis 28^2 keer zo klein zijn en de massa van zijn hart 28^3 keer zo klein.

Springende zoogdieren

Voor erg veel zoogdieren (in mindere mate voor de mens) geldt de benadering dat − uitgaande van de wet van behoud van mechanische energie − de arbeid W die nodig is om een sprong uit stand te maken tot een hoogte h ongeveer gelijk is aan mgh en dat voor de ‘take-off’ snelheid geldt:

$$v = \sqrt{2gh}\ .$$

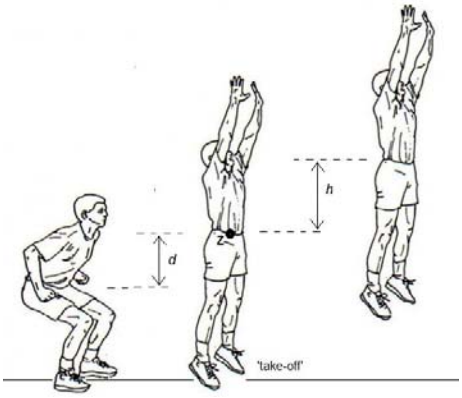
De springprestaties van veel zoogdieren lopen niet erg uiteen. Een kangoeroerat, ongeveer even groot als een konijn, springt net zo hoog als een grote kangoeroe. Hoe komt dat?

De kangoeroerat

Het ligt voor de hand om ervan uit te gaan dat het aantal joule aan energie dat per kg spiermassa geleverd kan worden voor alle zoogdieren gelijk is. Dus een groter zwaarder dier (de kangoeroe) met meer spiermassa kan meer springarbeid verrichten dan de kangoeroerat:

$W \sim m$.

We hadden al staan dat W ongeveer gelijk was aan mgh, dus mogen we schrijven: $mgh \sim m$ en dan blijkt de massa (of lengte) er niet toe doet. Een mens, een kangoeroerat of hond, ze springen vanuit stand allemaal ongeveer even hoog.



Verticale sprong vanuit stand

Het vermogen waarmee gesprongen wordt, is de geleverde energie E gedeeld door de afzettijd t. Met de gemiddelde snelheid $v_{gem} = ½v$ tijdens de afzetafstand d is de afzettijd t te berekenen:

$$t = \frac{d}{\frac{1}{2}v}\ .$$

De afzettijd t is evenredig met d en d is weer evenredig met de karakteristieke lengte L van het dier. Een langer dier kan dieper door zijn knieën. Aan de formule voor de ‘take-off’-snelheid $v = \sqrt{2gh}$ kun je zien dat v onafhankelijk is van L, dus $t \sim d \sim L$. Aangezien de voor de sprong beschikbare energie onafhankelijk is van L, geldt voor het vermogen P waarmee gesprongen wordt:

$$P = \frac{E}{t} \sim \frac{1}{L}$$

Dit voorspelt dat twee keer zo grote zoogdieren hun energie bij een sprong in een twee keer zo laag tempo afgeven.

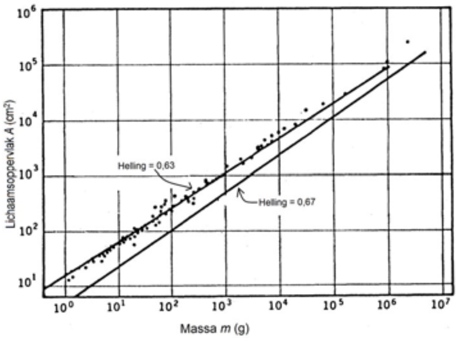
Lichaamsoppervlak en massa

We werken het simpele schaalmodel van Galilei nog iets verder uit. Omdat $L \sim m^{1/3}$ en het lichaamsoppervlak A evenredig is met L^2 geldt:

$$A \sim L^2 \sim (m^{1/3})^2 = m^{2/3} = m^{0{,}67}.$$

In een grafiek waarbij van de muis tot en met de olifant op dubbel-logpapier het lichaamsoppervlak A verticaal is uitgezet tegen de massa m verwacht je een rechte lijn met een helling van 0,67.

In 1932 kwam Kleiber erachter dat de helling van de $A(m)$-grafiek niet 0,67 was, maar 0,63.



A(m)-grafiek voor dieren

Dit verschil lijkt klein, maar was voor McMahon (professor in de toegepaste mechanica in Harvard) de reden om de schaalwet van Galilei te verlaten. Hij beschrijft dit in een prachtig artikel getiteld *Size and Shape* in *Science* (vol. 179 maart 1973 p. 2001-2004). Uit dat artikel komen ook de grafieken van deze OuNa.

De hoogte van een boom

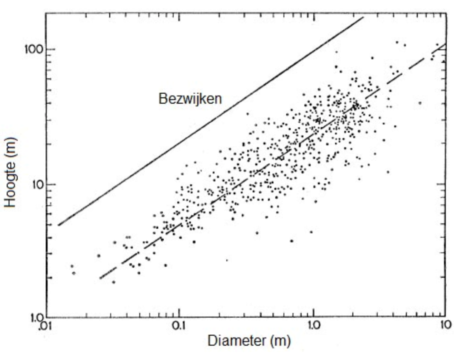
De oude Romeinen konden hun pilaren (cilinder) niet te hoog maken. Iedere te lange pilaar zal uiteindelijk, bijvoorbeeld door een zuchtje wind, gaan doorbuigen en onder zijn eigen gewicht in elkaar storten. De stijfheid van het materiaal is niet groot genoeg om een te lange pilaar overeind te houden. Voor een cilinder met een straal r die zijn eigen gewicht draagt, geldt voor de kritische hoogte:

$h_{\text{kritisch}} = \text{constante}\cdot r^{2/3}$

De afleiding van deze formule $h_{\text{kritisch}} \sim r^{2/3}$ staat aan het eind. Uit deze formule volgt dat bij een pilaar, die op het punt van instorten staat, een verdubbeling van de straal geen verdubbeling van de maximale hoogte inhoud:

$$h_2 = \left(\frac{2r_1}{r_1}\right)^{2/3} \cdot h_1 = 1{,}59 \cdot h_1$$

Een verdubbeling van de straal betekent dat de pilaar maximaal 1,6 keer zo hoog kan worden.
Voor bomen geldt hetzelfde: er is een kritische hoogte die afhankelijk is van de straal van de stam. Het diagram op logpapier voor bomen in Noord Amerika laat zien dat $h_{\text{kritisch}} = \text{constante}\cdot r^{2/3}$ lijkt te kloppen. De stippellijn is de trendlijn die het beste bij de metingen past als voor de contante 34,9 $m^{1/3}$ wordt gekozen. Deze constante hangt af van de dichtheid en de elasticiteitsmodulus van het materiaal. De getrokken lijn waar 'bezwijken' bij staat, is berekend voor cilinders die op het punt staan door te buigen en onder hun eigen gewicht in te storten. Geen enkele boom komt boven deze theoretische limiet uit.



De hoogte van een boom

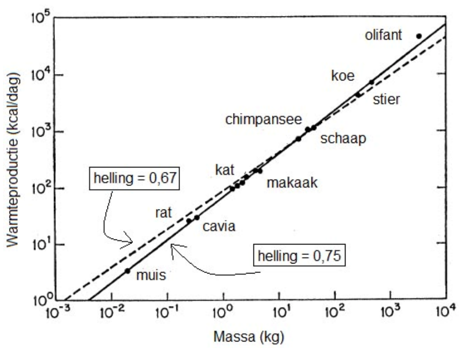
McMahon paste de formule $L \sim r^{2/3}$ ook toe op de schaalwetten voor dieren. Hierboven is al gewezen op het kleine verschil dat Kleiber had gevonden tussen experiment en theorie in de grafiek bij het lichaamsoppervlak A en de massa m van dieren. Beschouw het lichaam of lichaamsdelen zoals een bot van een dier niet als bol of kubus (met L^3), maar als een cilinder en gebruik daarbij de schaalwet voor de kritische hoogte van een boom $L \sim r^{2/3}$. Als we de regel herschrijven staat er $r \sim L^{3/2}$.
Voor het volume van een cilinder met lengte L en straal r geldt: $V = \pi r^2 L$, dus $V \sim r^2 L$.
Omdat massa en volume evenredig zijn geldt ook $m \sim r^2 L$. Invullen van de schaalwet $r \sim L^{3/2}$ geeft $m \sim (L^{3/2})^2 \cdot L = L^4$ (en dus **niet** L^3 zoals Galilei veronderstelde!). Als we dit laatste herschrijven tot $L \sim m^{1/4}$ en invullen in $r \sim L^{3/2}$ dan krijgen we $r \sim (m^{1/4})^{3/2} = m^{3/8}$.
Het oppervlak A van een cilinder kun je berekenen met $A = 2\pi rL$. Dus is: $A \sim rL \sim m^{3/8} m^{1/4} \sim m^{5/8} = m^{0,63}$.
Daarmee is de macht (0,63) gelijk aan de helling van de $A(m)$-grafiek .

Warmteproductie/vermogen

Voor het vermogen P van spieren geldt: $P = Fv$. Voor alle zoogdieren geldt dat de spierkracht $F = \sigma A$ waarin σ een constante is en A het dwarsoppervlak van de spieren. De snelheid waarmee zoogdieren hun spieren kunnen samentrekken is voor alle zoogdieren (ongeveer) gelijk. Het vermogen P van de spieren hangt natuurlijk af van de lichaamsmassa m. Grote zoogdieren hebben grotere spieren en kunnen meer vermogen leveren. Je kunt nu aan de leerlingen de volgende twee redeneervragen over evenredigheden stellen:

a Laat zien dat volgens de schaalwet van Galilei ($m \sim L^3$) voor het vermogen van spieren geldt: $P \sim m^{0,67}$.

Uit de trendlijn (de getrokken lijn) door metingen aan de warmteproductie bij grote en kleine zoogdieren blijkt echter dat de formule moet zijn $P \sim m^{0,75}$. De schaalwet van Galilei (weergegeven met de stippellijn) klopt dus niet.

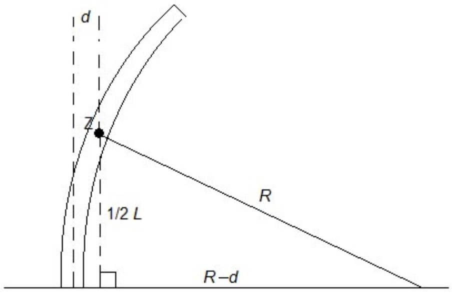


Warmteproductie

b Laat zien dat met behulp van $L \sim r^{2/3}$ volgt dat: $P \sim m^{0,75}$.

De afleiding van de formule voor $h_{kritisch}$

Een verticale cilinder met straal r en lengte L buigt door onder zijn eigen gewicht. De cilinder beschrijft nu een stuk van een grote cirkelomtrek met straal R.



De zwaartekracht zorgt voor een moment $M_{rechtsom} = F_z d$. Zolang er evenwicht is, geldt de momentenwet: $M_{rechtsom}$ moet worden gecompenseerd door een intern moment $M_{linksom}$. Dit moment wordt gevormd door de interne druk- en trekkrachten tussen de moleculen aan de voet van de cilinder:

$$M_{linksom} = \frac{EI_A}{R}$$

Hierin is E de elasticiteitsmodulus (modulus van Young) en I_A het *oppervlakte traagheidsmoment*.
Voor een cilinder is $I_A = \frac{1}{4}\pi r^4$.
Dus op het moment van instorten geldt:

$$\frac{E\pi r^4}{4R} = F_z d \qquad \textbf{(1)}$$

Voor F_z geldt: $F_z = mg = \rho g V = \rho g \pi r^2 L$ **(2)**

Met Pythagoras en de goede benadering $h_z = \frac{1}{2}L$ kunnen we een uitdrukking vinden voor d:

$$(R-d)^2 + \left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = R^2$$

Het uitwerken van de haken en het verwaarlozen van de kleine term d^2 levert:

$$d = \frac{L^2}{8R} \qquad \textbf{(3)}.$$

Vul (2) en (3) in vergelijking (1) in en werk de vergelijking om tot:

$$L = \left(\frac{2E}{\rho g}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot r^{\frac{2}{3}}$$