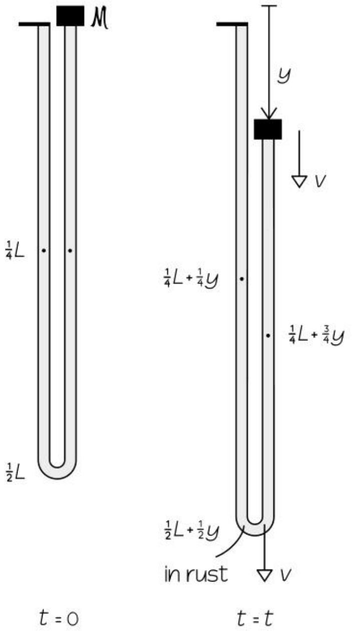
De bungee jumper

De jumper met massa M valt aan een touw met massa m en lengte L. Voor de 'lineaire dichtheid' r geldt: $r = m/L$. Het linker deel van de figuur geeft de beginsituatie weer op $t = 0$ s; het rechter deel hoort bij het tijdstip t als de jumper de afstand y heeft afgelegd.
Het linker deel van het touw zit aan een brug vast en is in rust; het rechter deel van het touw en de jumper hebben op het tijdstip t de snelheid v.



In het onderste punt van het touw is dus wat geks aan de hand: het linker deel van dat punt (als je dat al zeggen kunt) is in rust en het rechter deel beweegt met de snelheid v.

De vier punten in de stukken touw geven de afstanden aan van hun zwaartepunten tot aan de brug.

De vier massa's zijn respectievelijk:

$\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m$, $r\cdot(\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}y)$ en $r\cdot(\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}y)$.

Energiebehoud
Op $t = 0$ geldt voor de energieën:

$E_k = 0$ en $E_z = -m\cdot g\cdot\frac{1}{4}L$

Het minteken staat erbij omdat vanuit het ophangpunt bij de brug wordt gerekend.

Op het tijdstip t geldt:

$E_k = \frac{1}{2}\cdot\{M + r\cdot(\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}y)\}v^2$ en

$$E_z = -\left\{M\cdot y + r\cdot\left(\tfrac{1}{2}L+\tfrac{1}{2}y\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}L+\tfrac{1}{4}y\right) + r\cdot\left(\tfrac{1}{2}L-\tfrac{1}{2}y\right)\cdot\left(\tfrac{1}{4}L+\tfrac{3}{4}y\right)\right\}\cdot g$$

Volgens energiebehoud geldt:

$\Sigma E(0) = \Sigma E(t)$

Als je dat toepast en bij het uitwerken geen fouten maakt, vind je:

$$v^2 = g\,\frac{4MLy + 2mLy - my^2}{mL - my + 2ML}$$

Deze formule is niet te integreren tot een $y(t)$-formule.

Als je deze formule voor v^2 naar t differentieert via de kettingregel, vind je links: $2v\cdot v'(t)$. Hierin is $v'(t)$ de versnelling $a(t)$.
Rechts ben je wel even bezig, maar als je bedenkt dat $y'(t) = v(t)$, dan vind je ten slotte:

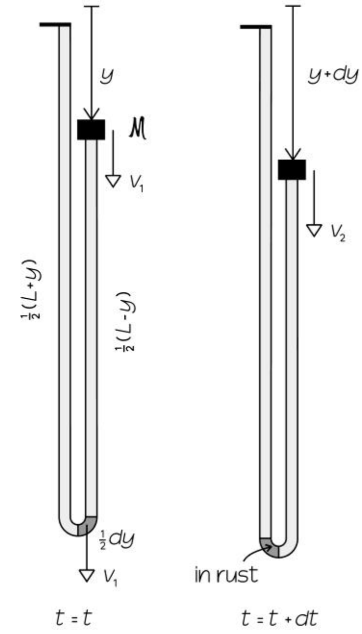
$$a = g\left(1 + \frac{my\left(4ML + 2mL - my\right)}{2\left(mL - my + 2ML\right)^2}\right)$$

Denk eens na over deze twee bijzondere gevallen: $m = 0$ en $M = 0$ bij $y = L$.

De versnelling neemt toe tijdens de val
De volgende figuur geeft de situatie weer op twee tijdstippen die kort na elkaar liggen. In de tijd dt neemt y toe met de afstand dy en de snelheid groeit rechts aan van v_1 tot v_2. Tegelijk komt links onderaan een stukje touw met de lengte $\frac{1}{2}$dy tot rust dat rechts bewoog met de snelheid v_1.
De massa van dat stukje is $r\cdot\frac{1}{2}$dy. Voor deze gebeurtenis geldt volgens de tweede wet van Newton:

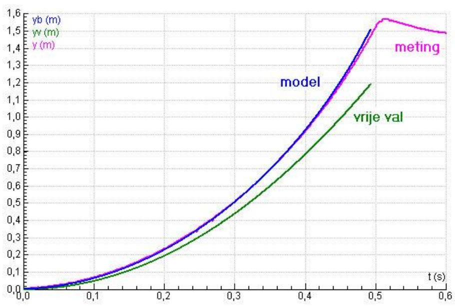
$F\cdot \mathrm{d}t = r\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}y\cdot v_1$

De opwaartse kracht F die hiervoor nodig is, wordt door *beide* helften van het touw geleverd. Volgens actie/reactie wordt de kracht op de jumper dus groter dan Mg en zijn versnelling groter dan g.

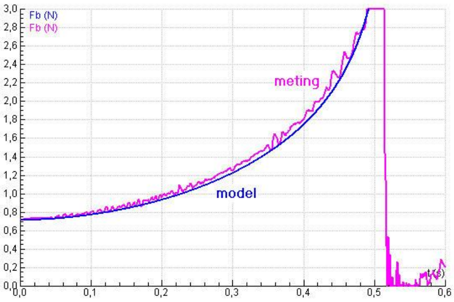


Meten van y
Met deze opstelling is y gemeten.De cilinder van messing (M) glijdt langs een draad constantaan waarover 5 V staat. Zie *Stevin vwo deel 1*, p. 38.

De roze lijn hoort bij de vallende cilinder en de groene lijn bij een vrije val met 9,8 m/s^2. De blauwe lijn hoort bij het model dat hierna besproken wordt. De bewering $a > g$ wordt dus bevestigd.



Meten van F_b op de brug
Eén van de kettingen zat aan een krachtmeter vast zodat tegelijk de kracht op de brug kon worden vastgelegd. Op de brug werkt dus een kracht die steeds groter wordt – afgezien nog van het feit dat er steeds meer stil hangend touw aan de brug komt te hangen.



Een model voor de vallende bungee jumper
In de regel laat je in een model de tijd t oplopen met stapjes dt en bereken je vervolgens een nieuwe waarde van y.

De $y(t)$-grafieken
In het model voor de bungee jumper laten we y oplopen met stapjes dy en berekenen we vervolgens de tijdsduur dt waarin dat gebeurd is. Omdat er sprake is van twee soorten y gebruiken we y_b voor de bungee jumper en y_v voor de vrije val met 9,8 m/s^2.

In het model worden 10 000 van die stapjes genomen. Met k worden die stapjes geteld.

v_1 is de snelheid voordat de nieuwe afstand dy_b afgelegd is en v_2 is de snelheid daarna. Die nieuwe snelheid v_2 kan berekend worden met de formule van de vorige pagina:

$$v = \sqrt{g y_b \frac{4ML + 2mL - m y_b}{mL - m y_b + 2ML}}$$

Voor de gemiddelde snelheid tijdens de val over dy_b gebruiken we

$$v_g = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{en} \quad \mathrm{d}y_b = v_g \cdot \mathrm{d}t$$

Op die manier kunnen we dus dt berekenen en de tijd laten oplopen. Daarna berekenen we y_v voor de vrije val.

De $F_b(t)$-grafiek
De kracht op de brug bestaat uit twee delen:
- een statisch deel F_1 door het touw dat in rust hangt en
- een dynamisch deel F_2 doordat het halve stukje dy_b tot rust wordt gebracht.

Omdat maar één van de kettingen aan de krachtmeter is vastgemaakt, gebruiken we $F_b = (F_1 + F_2)/2$.

Model
```
yb = yb + dyb
v2 = sqrt(g*yb*(4*M*L+2*m*L−m*yb)/(m*L−m*yb+2*M*L))
vg = (v1 + v2)/2
dt = dyb/vg
t = t + dt
yv = 4,9*t^2
F1 = 0,5*(L + yb)*r*g
F2 = 0,5*r*0,5*dyb*v1/dt
Fb = 0,5*(F1 + F2)
v1 = v2
k = k + 1
als k = N+1 dan stop eindals
```

Startwaarden
```
M = 0,057
m = 0,29
L = 1,51
r = m/L
g = 9,8
N = 10000
yb = 0
yv = 0
dyb = L/N
k = 1
v1 = 0
```